

文章编号: 1000-7598-(2005) 10-1530-05

6 节点无界元及其应用

史贵才^{1,2}, 葛修润¹, 王水林¹

(1.中国科学院岩土力学重点实验室, 武汉 430071; 2.常州工学院 土木建筑工程学院, 江苏 常州 213002)

摘 要: 推导了 6 节点无界元的相关公式, 并采用 VC++ 和 Matlab 混合编程的手段, 设计了基于 Windows 操作平台的面向对象的有限元与无界元耦合分析软件。应用该软件, 成功的对某大型水电站地下洞室群的稳定性进行了有限元分析和有限元与无界元耦合分析, 验证了公式的正确性。分析表明, 在无限域和半无限域的岩土工程问题中引入无界元可以达到消除“边界效应”和提高计算效率的目的。

关 键 词: 无界元; 有限元; 耦合; 面向对象

中图分类号: TU 4; O 242.21

文献标识码: A

Six-node infinite element and its application

SHI Gui-cai^{1,2}, GE Xiu-run¹, WANG Shui-lin¹

(1.Key Laboratory of Rock and soil Mechanics, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China

2.School of Civil Engineering and Architecture, Changzhou Institute of Technology, Changzhou 213002, China)

Abstract: Formulas of infinite element with 6 nodes are presented; and an object-oriented geotechnical infinite element(IE)-finite element(FE) coupling software based on Windows is designed by combining VC++ with Matlab. As its application, the stability of underground excavation of a hydropower project in Yunnan Province is calculated by FEM and IE coupled with FE method; so that the accuracy of formulas is proved. The analysis of the example shows that, when infinite or semi-infinite calculating zone is involved in, the application of IE coupled with FE may eliminate “boundary effects” and raise the efficiency of calculation.

Key words: infinite element; finite element; couple; object-oriented

1 引 言

在大量的岩土工程有限元分析中经常遇到计算区域为无限介质或半无限介质问题, 其真实的边界条件是无穷远处位移为零, 例如矿山巷道、采场、水电站地下洞室群等均属于这类问题。而有限元方法处理这类问题时只能截取有限的区域, 并对边界附加近似的边界条件(力或边界约束), 例如在对水电站地下洞室群的围岩进行计算分析时, 通常截取从河谷到山脊的足够大的区域, 近似地利用河谷和山脊处的对称性而在相应的边界施加法向约束, 这必然使计算结果引入一定的误差和所谓的“边界效应”。事实上, 对于同一个有限元网格、相同的材料和荷载条件, 仅仅因为边界约束条件的不同, 其计算结果就可能有较大差别。故在对地下空间结构围岩进行稳定性分析时边界条件的确定是一个很值得推敲的问题。另外, 研究范围的选择也是一个相当

重要的问题, 一般认为区域选得越大, 计算结果越接近实际, 但选择的计算区域越大, 所划分的结点和单元数也就越多, 这样必然会大大增加计算工作量。实践表明, 在有限元分析中引入无界元方法是解决上述矛盾的有效措施, 往往只要截取很小的计算范围就够得到满足计算精度要求的结果和符合无穷远处位移为零的边界条件。

2 无界元的基本思想及其研究现状

2.1 无界元的基本思想

无界元是一个放射形的长条, 一端与有限元相接, 另一端趋于无限元。根据其实现无限域积分的方法的不同, 可以划分为两类, 即映射无界元和衰减无界元。映射无界元是通过映射坐标实现无限域的积分, 直接在映射坐标中建立位移函数而满足无限远处位移为零的边界条件; 而衰减无界元基本思想是适当选择单元形函数, 使某维局部坐标趋近于

1 时, 整体坐标趋向无穷大, 从而使实际计算范围伸向无限远。同时, 合理地选择位移函数, 使无限远处位移趋近于零, 从而实现无限远处位移为零的边界条件^[1]。

2.2 无界元的研究现状

无界元的基本概念最先是由 R.L.Ungless 于 1973 年提出, 此后 Zienkiewicz, Bettles, Beer, Meek 等发展了这种方法。20 世纪 70~80 年代, 我国吕明、葛修润、张楚汉等^[2~4]都对无界单元进行了研究并引入了实际应用。但 90 年代以后随着计算机运算速度的提高, 因为扩大计算范围可以在一定程度上削弱“边界效应”对计算敏感区域计算结果的影响, 因而导致无界元的研究工作有被逐渐轻视的倾向。然而, 笔者认为无界单元作为一种非常实用的单元, 仍然是值得肯定和推荐的, 与其把有限的计算资源花在对实际工程没有什么参考价值的扩大计算区域上, 不如引入无界元, 然后在具有一定参考价值的敏感区域划分更多的节点和更细密的计算单元。

3 6 节点无界单元模型

由于无界元在无限域和半无限域力学分析中的突出优点, 不少研究者都各自采用和推荐了自己的形函数和位移函数, 但是几乎所有的三维公式推导和算例都集中在 8 节点以上的无界元形式, 以便与 8~20 节点等参有限元配合使用。然而, 对于现实中的三维岩土工程问题, 节理和断层等结构面的切割, 很难保证在有限元边界面的单元节点数全部是规则的 4 节点以上单元, 更多的时候为四面体单元或者三棱柱单元所包含的 3 个节点。例如, 图 2 为某水电站地下洞室群围岩稳定性分析模型, 在边界面上存在大量为 3 节点的单元。为了解决这种类型的问题, 本文推导与简单实用的 6 节点无界单元的形函数和位移插值函数等相关公式。

3.1 6 节点映射无界元

图 1 为 6 节点映射无界元的示意图。图中(a)~(c)分别对应于母单元、局部坐标系和映射坐标系。

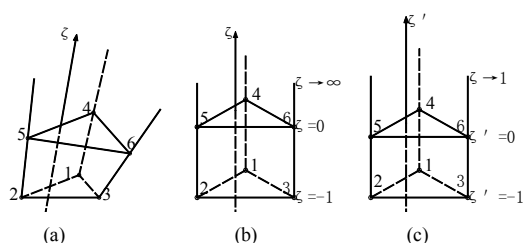


图 1 6 节点无界元示意图

Fig.1 Sketch of 6-node infinite element

3.1.1 6 节点映射无界元的形函数

为了实现无限域公式推导及无限域积分, 可以把图 1(b)映射到图 1(c)中的 ζ' 中, 使得 $\zeta' \rightarrow 1$ 时 $\zeta \rightarrow \infty$, 以满足无限域的几何特性。映射坐标和局部坐标之间的变换为

$$\zeta' = \zeta / (2 + \zeta) \quad \text{或} \quad \zeta = 2\zeta' / (1 - \zeta') \quad (1)$$

局部坐标和整体坐标之间的转换关系仍然可以表示为插值函数的形式:

$$x = \sum_{i=1}^6 N_i x_i; \quad y = \sum_{i=1}^6 N_i y_i; \quad z = \sum_{i=1}^6 N_i z_i \quad (2)$$

式中 N_i 为形函数, 其具体表达式为

$$\left. \begin{aligned} N_i &= -L_i \zeta, & i &= 1 \sim 3 \\ N_i &= L_{i-3} (1 + \zeta), & i &= 4 \sim 6 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 L_i 为面积坐标。3 个变量实际只有 2 个独立, 可令 $\xi = L_1$ 和 $\eta = L_2$, 则有 $L_3 = 1 - L_1 - L_2$ 。Jacobi 行列式表示为

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中 (x_i, y_i, z_i) 为 6 个节点的整体坐标; $\frac{\partial N_i}{\partial \zeta_i}$ 为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_6}{\partial \xi} & \frac{\partial N_6}{\partial \eta} & \frac{\partial N_6}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\zeta & 0 & -L_1 \\ 0 & -\zeta & -L_2 \\ \zeta & \zeta & -L_3 \\ 1+\zeta & 0 & L_1 \\ 0 & 1+\zeta & L_2 \\ -\zeta-1 & -\zeta-1 & L_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

3.1.2 6 节点映射无界元的位移函数

映射无界元只适用于静力问题分析, 其边界条件一般均为无穷远处位移为零, 故可以直接在映射坐标中按照拉格朗日插值给定位移函数。对于 6 节点无界单元有:

$$\left. \begin{aligned} M_i &= \frac{1}{2} L_i \zeta' (\zeta' - 1), & i &= 1 \sim 3 \\ M_i &= L_{i-3} (1 - \zeta'^2), & i &= 4 \sim 6 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

上述位移函数均满足在无限远处位移为零的要求。所以有:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial \xi'} & \frac{\partial M_1}{\partial \eta'} & \frac{\partial M_1}{\partial \zeta'} \\ \frac{\partial M_2}{\partial \xi'} & \frac{\partial M_2}{\partial \eta'} & \frac{\partial M_2}{\partial \zeta'} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial M_6}{\partial \xi'} & \frac{\partial M_6}{\partial \eta'} & \frac{\partial M_6}{\partial \zeta'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\zeta'(\zeta'-1)}{2} & 0 & \frac{2\zeta'-1}{2}L_1 \\ 0 & \frac{\zeta'(\zeta'-1)}{2} & \frac{2\zeta'-1}{2}L_2 \\ \frac{\zeta'(1-\zeta')}{2} & \frac{\zeta'(1-\zeta')}{2} & \frac{2\zeta'-1}{2}L_3 \\ 1-\zeta'^2 & 0 & -2\zeta'L_1 \\ 0 & 1-\zeta'^2 & -2\zeta'L_2 \\ \zeta'^2-1 & \zeta'^2-1 & -2\zeta'L_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

3.1.3 6 节点映射无界元的单元刚度

为了实现在映射坐标中的积分, 给出关系:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi'} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta'} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \xi'} & \frac{\partial \eta}{\partial \xi'} & \frac{\partial \zeta}{\partial \xi'} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \eta'} & \frac{\partial \eta}{\partial \eta'} & \frac{\partial \zeta}{\partial \eta'} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \zeta'} & \frac{\partial \eta}{\partial \zeta'} & \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = [J_2] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中,

$$[J_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{(1-\zeta')^2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

故其行列式的值为

$$\det J_2 = \frac{2}{(1-\zeta')^2} \quad (10)$$

映射无界元的单元刚度分析按等参元的步骤进行。

$$\begin{aligned} [k]_e &= \iiint [B]^T [D] [B] dV = \\ &= \iiint_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det J_1 d\xi d\eta d\zeta = \\ &= \iiint_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det J_1 \det J_2 d\xi' d\eta' d\zeta' \end{aligned} \quad (11)$$

单元刚度矩阵中的 $[B]$ 应该按相应的位移函数求导得到, 即有:

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_i}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial M_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial M_i}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial M_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial M_i}{\partial x} & \frac{\partial M_i}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial M_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial M_i}{\partial y} & \frac{\partial M_i}{\partial x} \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

有研究认为^[5], 无界单元也可以进行弹塑性分析。但是笔者认为, 无界元的重要功能是消除“边界效应”和减少非必要的计算单元数和节点数, 而非进行塑性计算, 故宜安置在工程外围的弹性区域, 物性矩阵 D 取用弹性物性矩阵, 可不考虑材料的非线性特性。

3.2 6 节点衰减无界元

6 节点衰减无界元如图 1(a)和图 1(b)所示, 两个图分别对应于母单元和局部坐标系。

3.2.1 6 节点衰减无界元的形函数

局部坐标和整体坐标之间的转换关系可以表示为插值函数的形式, 即式 (2)。

当 $\zeta > 0$ 时, 有

$$\left. \begin{aligned} N_i &= \frac{-L_i \zeta}{(1-\zeta)}, \quad i=1 \sim 3 \\ N_i &= \frac{L_{i-3}}{(1-\zeta)}, \quad i=4 \sim 6 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_6}{\partial \xi} & \frac{\partial N_6}{\partial \eta} & \frac{\partial N_6}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\zeta}{1-\zeta} & 0 & \frac{-L_1}{(1-\zeta)^2} \\ 0 & \frac{-\zeta}{1-\zeta} & \frac{-L_2}{(1-\zeta)^2} \\ \frac{\zeta}{1-\zeta} & \frac{\zeta}{1-\zeta} & \frac{-L_3}{(1-\zeta)^2} \\ \frac{1}{1-\zeta} & 0 & \frac{L_1}{(1-\zeta)^2} \\ 0 & \frac{1}{1-\zeta} & \frac{L_2}{(1-\zeta)^2} \\ \frac{1}{\zeta-1} & \frac{1}{\zeta-1} & \frac{L_3}{(1-\zeta)^2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

当 $\zeta \leq 0$ 时, 形函数同式 (3), 形函数对局部坐标的导数 $\partial N_i / \partial \zeta_i$ 同式 (5)。

3.2.2 6 节点衰减无界元的位移函数

6 节点衰减无界元的位移函数为

$$u = \sum_{i=1}^6 M_i u_i; \quad v = \sum_{i=1}^6 M_i v_i; \quad w = \sum_{i=1}^6 M_i w_i \quad (15)$$

式中 $M_i = M_i^0 f_i(r)$ 为位移函数, M_i^0 可取为 $\zeta \leq 0$ 时的形函数 N_i , $f_i(r)$ 为衰减函数, 应该满足下列条件:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} f_i(r) = 0 \quad (16)$$

衰减函数的选择视问题的性质而定, 应当选择能正确反映无限远处的边界条件以及位移场的变化规律。对于岩土工程问题常采用如下的简单形式:

$$f_i(r) = (r_i/r)^\alpha \text{ 或 } f_i(r) = \exp(1-r/r_i) \quad (17)$$

式中 r 为任意一点到所选择的衰减中心的距离, 可称为衰减半径 (衰减中心应该取在计算区域的几何中心附近); r_i 为节点 i 的衰减半径; 指数 $\alpha \geq 1$, 通常取为 1 或者 2。

$$\frac{\partial M_i}{\partial \xi_j} = \frac{\partial M_i^0}{\partial \xi_j} f + \frac{\partial f}{\partial \xi_j} M_i^0 \quad (18)$$

其中, M_i^0 取式 (13), 而 $\partial M_i^0 / \partial \xi_j$ 按式 (14) 取值。

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_j} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi_j} \quad (19)$$

3.2.3 6 节点衰减无界元的单元刚度

衰减无界元的单元刚度分析也可以按等参元的步骤进行, 其计算式为

$$[k]_e = \iiint [B]^T [D] [B] \det J d\xi d\eta d\zeta \quad (20)$$

单元刚度矩阵中的 $[B]$ 表达式同式 (12), 相应项按式 (18) 取值。Jacobi 矩阵表达式同式 (4), 只是相应项应该按照式 (5) 或者式 (12) 取值。

4 算例与分析

根据上述思想, 笔者采用 VC++ 和 Matlab 混合编程的手段, 设计了基于 Windows 操作平台的面向对象的有限元与无界元耦合分析软件。程序中还引入了可以与 8 节点有限元配合使用的 8 节点无界元, 其相应原理可参考相关文献^[2]。

图 2 为云南某水电站的有限元计算模型。模型底部约束高程为 700 m, 在主厂房轴线方向, 有 1~6 号机组, 厂房各向外延伸 200 m, 在垂直于主厂房轴线方向, 主厂房上游侧墙向上游延伸 200 m, 调压井垂直轴线向下游延伸 200 m。计算范围的单元数为 84 917, 节点数为 19 347, 其地下洞室群主要由主厂房、母线洞、主变室、尾水闸门室、调压井等组成 (图 3)。

用上述模型对该水电站地下洞室群的开挖过程进行了脆塑性模拟分析, 为了简化计算, 没有考虑

围岩的支护措施。表 1 给出了图 4 所示的相应关键部位点的有限元计算值, 1~3 号点分别对应于主厂房、主变室和尾水闸门室的拱顶, 4 号点对应于主厂房的底板中心, 5~10 号点分别对应于地下洞室群高边墙相应的特征部位, 表中点号后的 V 表示竖向位移, 负值意味着拱顶下沉, 正值意味着底板隆起, H 表示水平方向的位移, 即洞周收敛。

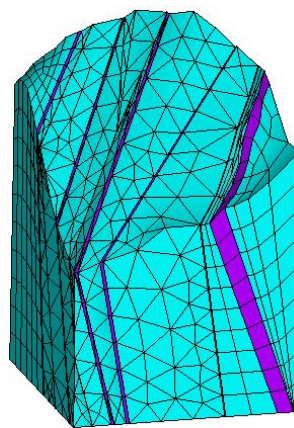


图 2 有限元计算网格

Fig.2 Calculation mesh of FEM

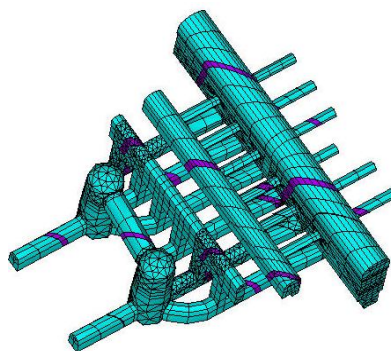


图 3 地下洞室群计算网格

Fig.3 Calculation mesh of underground excavation

表 1 特征点位移有限元计算值

Table 1 FEM displacement results of keypoints

点号	不同机组 (号) 位移计算值/cm					
	1	2	3	4	5	6
1V	-2.40	-2.27	-1.90	-1.66	-2.06	-1.55
2V	-2.06	-1.93	-2.18	-1.68	-1.46	-1.36
3V	-1.30	-1.33	-1.03	-1.03	-0.90	-0.79
4V	1.93	1.95	1.81	1.60	1.53	1.66
5H	-3.95	-4.02	-4.95	-8.60	-3.31	-3.11
6H	-2.60	-3.29	-3.86	-5.39	-4.16	-2.31
7H	-0.36	-0.84	-0.33	-0.38	-0.63	-0.77
8H	0.12	0.05	0.21	0.21	-0.10	-0.19
9H	0.27	0.60	0.52	0.39	0.09	0.82
10H	0.52	-0.11	-0.13	-0.09	0.03	-0.07

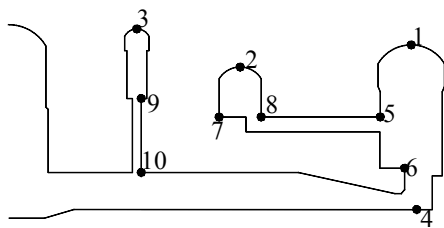


图4 用于对比的关键点

Fig.4 Key points of being contrasted

在有限元计算模型的基础上, 缩小计算范围。保持模型底部约束高程 700 m 不变; 在主厂房轴线方向, 由 1 号与 6 号厂房 (机组) 各向外延伸 100 m; 在垂直于主厂房轴线方向, 由主厂房上游侧墙向上游延伸 100 m, 由调压井垂直轴线向下游延伸 100 m, 在侧面边界上应用 6 节点和 8 节点无界单元。计算划分的单元数为 35 672, 节点数为 8 067。计算过程中采用了衰减无界元方法, 其衰减中心取在地下主厂房的中心位置。

用上述无界元与有限元耦合模型对该水电站地下硐室群的开挖过程进行了脆塑性模拟分析, 不考虑围岩的支护措施。表 2 分别给出了相应关键部位点的计算值。

表2 特征点无界元与有限元耦合位移计算值

Table 2 IE/FE displacement results of keypoints

点号	不同机组 (号) 位移计算值 / cm					
	1	2	3	4	5	6
1V	-2.53	-2.30	-2.08	-1.75	-2.05	-1.61
2V	-2.09	-2.00	-2.28	-1.72	-1.53	-1.33
3V	-1.37	-1.42	-1.08	-1.07	-0.91	-0.82
4V	1.96	1.97	1.84	1.68	1.60	1.75
5H	-3.99	-4.13	-5.07	-8.95	-3.40	-3.22
6H	-2.63	-3.35	-3.87	-5.44	-4.31	-2.43
7H	-0.45	-1.00	-0.41	-0.49	-0.75	-0.82
8H	0.23	0.11	0.34	0.36	-0.18	-0.30
9H	0.38	0.64	0.59	0.45	0.13	0.89
10H	0.63	-0.18	-0.22	-0.14	-0.01	-0.11

经对比不难发现, 上述两种计算模型在地下硐室群的关键部位的计算结果比较接近, 从而验证了本文有关公式的正确性。用无界元与有限元耦合分析, 比单纯使用有限元分析减少了大量的计算工作量。另外, 在有限元分析中, 因为人为引入了的边界条件 (底部固定约束, 侧面边界施加法向约束), 在模型的底角和断层边界处出现不合理的塑性区域, 而引入无界元后该情况消失, 说明无界元与有

限元耦合分析在一定程度上消除了边界效应的影响。

5 结 论

(1) 本文推导了 6 节点无界单元的相关公式。

(2) 采用 VC++ 和 Matlab 混合编程的手段, 设计了基于 Windows 操作平台的面向对象的有限元与无界元耦合分析的软件。

(3) 应用所编制的程序, 对某大型水电站进行了有限元分析和有限元与无界元耦合分析, 验证了公式推导的正确性。

(4) 计算表明, 在无限域和半无限域的岩土工程问题中, 引入无界元可以达到消除“边界效应”和提高计算效应的目的。

参 考 文 献

- [1] 周维垣, 刘怀恒. 高等岩石力学[M]. 北京: 水利电力出版社, 1990. 119—125.
- [2] 吕明. 无界元及其在工程中的应用[A]. 中国水利水电科学研究院科学研究论文集[C]. 北京: 中国水利水电出版社, 1985. 37—46.
- [3] 葛修润, 谷先荣, 丰定祥. 三维无界元与节理无界元[J]. 岩土工程学报, 1986, 8(5): 9—20.
GE Xiu-run, GU Xian-rong, FENG Ding-xiang. Three-dimensional infinite domain elements and joint infinite domain elements[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1986, 8(5): 9—20.
- [4] 张楚汉, 赵崇斌. 用无穷元研究断层对重力坝地基的影响[J]. 水利学报, 1986, (9): 24—32.
ZHANG Chu-han, ZHAO Chong-bin. Effects of faults on foundation stress distribution of gravity dams by using infinite elements[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1986, (9): 24—32.
- [5] 张镜剑, 涂金良. 变结点无界元和有限元耦合在三维弹塑性分析中的应用[J]. 华北水利水电学报, 1991, (3): 1—7.
ZHANG Jing-jian, TU Jin-liang. The study of application on the finite element with coupled the unboundary element with variable nodes in the three dimensional elasto-plastic analysis[J]. Journal of North China Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, 1991, (3): 1—7.